تمارين حول الدوال الأسية -الجزء 2-

فهرس التمارين

حساب مشتقة الدالة $f=e^{u}$:

التمرين 1:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{x^2}$	2) $f(x)=e^{3x+\sqrt{x}}$	3) $f(x)=e^{9x^2+\frac{1}{x}}$	4) $f(x)=e^{-3x^2+12x-4}$
5) $f(x)=e^{2x\sqrt{x}}$	6) $f(x)=e^{\frac{x}{2x+1}}$	7) $f(x)=e^{-7x^5+3x^2}$	8) $f(x)=e^{(2x+1)^5}$

التمرين 2:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{\frac{-2}{x}}$	2) $f(x)=e^{\frac{-3x-5}{-3x-2}}$	3) $f(x)=e^{-3x^2+5x+1}$
4) $f(x)=e^{\frac{3x+2}{x+1}}$	5) $f(x)=e^{4x^2+2}$	6) $f(x)=e^{\frac{5x+4}{1-5x}}$

التمرين 3:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{5x^2-2}$	2) $f(x)=e^{5-2x}$	3) $f(x)=e^{\frac{-3}{x}}$
4) $f(x)=e^{-4x^2-4x+3}$	5) $f(x)=e^{\frac{3-x}{1-3x}}$	6) $f(x)=e^{5x+2}$
7) $f(x)=e^{3x+3}$	8) $f(x)=e^{-x^2-2x+4}$	9) $f(x)=e^{1-x}$

التمرين 4:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية، ثم أدرس إشارتها:

1) $f(x)=e^{2x}$	2) $f(x)=e^{-3x+5}$	3) $f(x)=e^{2x^2+1}$

حساب مشتقة دالة مرجعية تتضمن دالة أسية:

التمرين 5:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=xe^{x}$	2) $f(x)=\dfrac{e^{x}-x}{2e^{x}+1}$	3) $f(x)=(2x-1)e^{x}$
4) $f(x)=(e^{x}-x)(2e^{x}-3)$	5) $f(x)=\sqrt{e^{x}-4}$	6) $f(x)=\dfrac{1}{x}e^{2x}$
7) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x-5}}$	8) $f(x)=\left(e^{3x^2+2x}+x\right)^{8}$	

التمرين 6:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\left(\frac{5}{x}\right)e^x$	2) $f(x)=\left(\frac{5x+2}{4x-2}\right)e^x$	3) $f(x)=\left(-\frac{4x}{5x+5}\right)e^x$
4) $f(x)=\left(-5x^2+5x-5\right)e^x$	5) $f(x)=\left(\frac{-x-4}{3x-4}\right)e^x$	6) $f(x)=\left(\frac{x+3}{-5x-4}\right)e^x$
7) $f(x)=(4x-2)e^x$		

التمرين 7:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{e^{-2x-4}}{3x-3}$	2) $f(x)=(-2x-1)e^{-x-1}$
3) $f(x)=\frac{4-3x}{e^{4-x}}$	4) $f(x)=(-x-3)e^{3-x}$

التمرين 8:

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية، ثم أدرس إشارتها:

1) $f(x)=(2x+1)e^{2x+1}$	2) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	3) $f(x)=\frac{3e^x}{e^{2x}+1}$

حساب المشتقات المتتالية لدالة تتضمن الدالة الأسية:

التمرين 9:

أحسب المشتقة الأولى و المشتقة الثانية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=(2x-2)e^{5x+3}$	2) $f(x)=(-5x)e^{x+5}$
3) $f(x)=\left(-5x^2-4x-4\right)e^{x+5}$	4) $f(x)=\left(5-x^2\right)e^{x+2}$

التمرين 10:

أحسب المشتقة الأولى و المشتقة الثانية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=(3x+2)e^{4x}$	2) $f(x)=\left(x^3+2x-7\right)e^x$
3) $f(x)=\left(e^x-2\right)^4$	4) $f(x)=(-3x-5)e^{5-3x}$

تحديد نهاية دالة أسية:

التمرين 11:

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} -5e^x$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} -5e^x$	3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5+e^x$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+e^x$	5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-e^x$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}$	7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3}{e^x}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{7}$	9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{3}e^x$	10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^x}$

التمرين 12:

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+3}$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$	3) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-3}$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$

التمرين 13:

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$	2) $\lim\limits_{x\to3} 2e^{2x^2-18}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-3x}{2x-1}}$	4) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^3-5}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x^2-3x+5}$	6) $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{2x^2-x}{x}}$	7) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{2x^2-3x}{x+5}}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+x+1}$

التمرين 14:

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3-x}$	2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{3x^2-5x+4}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3x-7}}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-4x^5-2x+3}{3x-7}}$	5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-3x-5}$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-3x-5}$

تحديد نهاية دالة تتضمن عبارة أسية:

التمرين 15:

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{e^{-x-3}}$	2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{e^{-6x^2-4x+2}}$	3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+8)e^{-5x-8}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (6x+6)e^{7x}$	5) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1+e^{2x^2-x-1}$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5x-5}{e^{-15x^2+5x+4}}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x-3+e^{-2x^2+3x-5}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x-7)e^{x^2+21x-4}$	9) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-5x-6)e^{2x^2+9x+3}$

التمرين 16:

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^{x}+5}{3e^{x}-7}$	2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x}-7x$	3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}-2}{-7}$	4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+7)e^{-2x}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+3e^{-x^{2}+1}$	6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}-3}{e^{x}+2}$	7) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}+1}{e^{2x}}$	

التمرين 17:

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^{2}+4)e^{x}$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}+x^{2}$	3) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-3x^{5}$
4) $\lim\limits_{x\to0} e^{x}(1-2e^{x})$	5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}}{x}$	6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}+1}{2e^{x}-3}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}+2x^{2}+1$	8) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{x}-2x^{3}+1)(1-3e^{x})$	

تشكيل جدول تغيرات دالة أسية:

التمرين 18:

شكّل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{x}+x$	2) $f(x)=xe^{x}$	3) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{2x}$
4) $f(x)=e^{x}-3x+1$	5) $f(x)=e^{x^{2}+3x+1}$	

التمرين 19:

شكّل جدول تغيرات الدالة f على I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=-2(2x+1)e^{-x}$ $\quad I=[-5;2]$	2) $f(x)=(x-5)e^{3x}$ $\quad I=[1;5]$
3) $f(x)=5x+5-2e^{-2x}$ $\quad I=[1;5]$	4) $f(x)=1-2e^{3x}$ $\quad I=[1;5]$
5) $f(x)=4xe^{4x}$ $\quad I=[-5;2]$	6) $f(x)=-(2x+3)e^{-3x}$ $\quad I=[-10;5]$

التمرين 20:

في كل حالة من الحالات التالية:

1) أحسب $f'(x)$.

2) أدرس إشارة $f'(x)$.

1) $f(x)=\left(x^2-\frac{22}{3}x+\frac{113}{9}\right)e^{-3x-3}$	2) $f(x)=\left(x^2-15\right)e^{4-x}$
3) $f(x)=-(3x-1)e^{-3x}$	4) $f(x)=\left(x^2-5x+5\right)e^{3-x}$

إيجاد معادلة المماس عند نقطة معينة:

التمرين 21:

في كل حالة من الحالات التالية:

❖ أحسب $f'(x)$.

❖ ما هي معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

1) $f(x)=(2-x)e^{2x}$	2) $f(x)=3-x+6e^{-2x}$
3) $f(x)=(3-5x)e^{-x}$	4) $f(x)=3x+2+7e^{-x}$
5) $f(x)=-4(x-1)e^{4x}$	

التمرين 22:

1) $f(x)=5-4x+5e^{4x}$.

❖ أحسب $f'(x)$.

❖ ما هي معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.

2) $f(x)=-2(x-2)+4e^{-x}$.

❖ أحسب $f'(x)$.

❖ ما هي معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها (-1).

دراسة دالة أسية:

التمرين 23:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{-x}{2}}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $f'(x)$.

2) شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4;4]$.

3) أرسم (C_f) على المجال $[-4;4]$.

التمرين 24:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-2x^2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $f'(x)$.

2) شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-5;5]$.

3) أثبت أنه إذا كانت النقطة $M(x;y)$ تنتمي لـ (C_f)، فإن النقطة $M'(-x;y)$ تنتمي لـ (C_f) أيضا. ما الذي يمكن استنتاجه بالنسبة لـ (C_f).

4) باستعمال حاسبة أو جهاز كمبيوتر، أكمل الجدول التالي:

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	10
$f(x)$									

5) أرسم (C_f) على المجال $[-5;5]$.

التمرين 25:

لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-3x}$ و $g(x)=e^{-2x^2}$.

1) شكّل جدولي تغيرات الدالتين f و g .

2) أرسم (C_f) و (C_g).

3) ما هي إحداثيات نقاط تقاطعهما.

دراسة دالة تتضمن عبارة أسية:

التمرين 26:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $f'(x)$.

2) شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-5;5]$.

3) أثبت أن (C_f) يشمل النقطة O.

4) ما هو معامل توجيه المماس T لـ (C_f) عند النقطة O.

5) أرسم (C_f) والمماس T على المجال $[-5;5]$.

التمرين 27:

لتكن الدالة f المعرفة على $[-3;3]$ بـ: $f(x)=e^{2x}-2x$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $f'(x)$.

2) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) أرسم (C_f).

التمرين 28:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $f'(x)$.

2) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) ما هي معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

4) أرسم (C_f) والمماس T.

5) برهن أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. أحسب α .

تمّ بحمد الله وتوفيقه

حلول تمارين درس الدوال الأسية -الجزء 2-

فهرس حلول التمارين

حساب مشتقة الدالة $f=e^u$:

حل التمرين 1:

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x^2}$. نضع $u(x)=x^2$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=x^2 \Leftrightarrow u'(x)=2x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=2xe^{x^2}$.

2) f معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=e^{3x+\sqrt{x}}$. نضع $u(x)=3x+\sqrt{x}$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*};u(x)=3x+\sqrt{x} \Leftrightarrow u'(x)=3+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^{+*}; f'(x)=\left(3+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{3x+\sqrt{x}}$.

3) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{9x^2+\frac{1}{x}}$. نضع $u(x)=9x^2+\dfrac{1}{x}$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^*;u(x)=9x^2+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow u'(x)=18x-\dfrac{1}{x^2}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*; f'(x)=\left(18x-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{9x^2+\frac{1}{x}}$.

4) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-3x^2+12x-4}$. نضع $u(x)=-3x^2+12x-4$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=-3x^2+12x-4 \Leftrightarrow u'(x)=-6x+12$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=(-6x+12)e^{-3x^2+12x-4}$.

5) f معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=e^{2x\sqrt{x}}$. نضع $u(x)=2x\sqrt{x}$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^+;u(x)=2x\sqrt{x} \Leftrightarrow u'(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{2x}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\dfrac{2\left(\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+; f'(x)=\left(3\sqrt{x}\right)e^{2x\sqrt{x}}$.

6) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{x}{2x+1}}$. نضع $u(x)=\dfrac{x}{2x+1}$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\};u(x)=\dfrac{x}{2x+1} \Leftrightarrow u'(x)=\dfrac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}; f'(x)=\left(\dfrac{1}{(2x+1)^2}\right)e^{\frac{x}{2x+1}}$.

7) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-7x^5+3x^2}$. نضع $u(x)=-7x^5+3x^2$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=-7x^5+3x^2 \Leftrightarrow u'(x)=-35x^4+6x$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=\left(-35x^4+6x\right)e^{-7x^5+3x^2}$.

8) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{(2x+1)^5}$. نضع $u(x)=(2x+1)^5$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}; u(x)=(2x+1)^5 \Leftrightarrow u'(x)=10(2x+1)^4$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=10(2x+1)^4 e^{(2x+1)^5}$.

حل التمرين 2:

1) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{\frac{-2}{x}}$. نضع $u(x)=\frac{-2}{x}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^*; u(x)=\frac{-2}{x} \Leftrightarrow u'(x)=\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ f'(x)=\left(\frac{2}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$.

2) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{-3x-5}{-3x-2}}$. نضع $u(x)=\frac{-3x-5}{-3x-2}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}; u(x)=\frac{-3x-5}{-3x-2}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}; u'(x)=\frac{-3(-3x-2)-(-3x-5)(-3)}{(-3x-2)^2}$$

$$=\frac{-3(-\cancel{3x}-2+\cancel{3x}+5)}{(-3x-2)^2}=-\frac{9}{(-3x-2)^2}.$$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\};\ f'(x)=-\left(\frac{9}{(-3x-2)^2}\right)e^{\frac{-3x-5}{-3x-2}}$.

3) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-3x^2+5x+1}$. نضع $u(x)=-3x^2+5x+1$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}; u(x)=-3x^2+5x+1 \Leftrightarrow u'(x)=-6x+5$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-6x+5)e^{-3x^2+5x+1}$.

4) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{3x+2}{x+1}}$. نضع $u(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}; u(x)=\frac{3x+2}{x+1}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}; u'(x)=\frac{3(x+1)-(3x+2)}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{3x}+3-\cancel{3x}-2}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};\ f'(x)=\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)e^{\frac{3x+2}{x+1}}$.

5) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{4x^2+2}$. نضع $u(x)=4x^2+2$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}; u(x)=4x^2+2 \Leftrightarrow u'(x)=8x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=8xe^{4x^2+2}$.

6) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{5x+4}{1-5x}}$. نضع $u(x)=\frac{5x+4}{1-5x}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\};u(x)=\frac{5x+4}{1-5x}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\};u'(x)=\frac{5(1-5x)-(5x+4)(-5)}{(1-5x)^2}=\frac{5-\cancel{25x}+\cancel{25x}+20}{(1-5x)^2}=\frac{25}{(1-5x)^2}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\};f'(x)=\left(\frac{25}{(1-5x)^2}\right)e^{\frac{5x+4}{1-5x}}.$

حل التمرين 3:

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{5x^2-2}$. نضع $u(x)=5x^2-2$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=5x^2-2\Leftrightarrow u'(x)=10x\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};f'(x)=10xe^{5x^2-2}.$

2) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{5-2x}$. نضع $u(x)=5-2x$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=5-2x\Leftrightarrow u'(x)=-2\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};f'(x)=-2e^{5-2x}.$

3) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{\frac{-3}{x}}$. نضع $u(x)=\frac{-3}{x}$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^*;u(x)=\frac{-3}{x}\Leftrightarrow u'(x)=\frac{3}{x^2}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^*;f'(x)=\left(\frac{3}{x^2}\right)e^{\frac{-3}{x}}.$

4) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-4x^2-4x+3}$. نضع $u(x)=-4x^2-4x+3$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=-4x^2-4x+3\Leftrightarrow u'(x)=-8x-4=-4(2x+1).$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};f'(x)=-4(2x+1)e^{-4x^2-4x+3}.$

5) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{3-x}{1-3x}}$. نضع $u(x)=\frac{3-x}{1-3x}$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};u(x)=\frac{3-x}{1-3x}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};u'(x)=\frac{-1(1-3x)-(3-x)(-3)}{(1-3x)^2}=\frac{\cancel{3x}-1+9-\cancel{3x}}{(1-3x)^2}=\frac{8}{(1-3x)^2}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};f'(x)=\left(\frac{8}{(1-3x)^2}\right)e^{\frac{3-x}{1-3x}}.$

6) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{5x+2}$. نضع $u(x)=5x+2$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=5x+2\Leftrightarrow u'(x)=5\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};f'(x)=5e^{5x+2}.$

7) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{3x+3}$. نضع $u(x)=3x+3$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=3x+3\Leftrightarrow u'(x)=3\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};f'(x)=3e^{3x+3}.$

8) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x^2-2x+4}$. نضع $u(x)=-x^2-2x+4$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=-x^2-2x+4\Leftrightarrow u'(x)=-2x-2=-2(x+1).$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-2(x+1)e^{-x^2-2x+4}$.

9) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{1-x}$. نضع $u(x)=1-x$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}; u(x)=1-x \Leftrightarrow u'(x)=-1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-e^{1-x}$.

حل التمرين 4:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=2e^{2x}>0$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{-3x+5} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-3e^{-3x+5}<0$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{2x^2+1} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=4xe^{2x^2+1}$

- ❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- ❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$
- ❖ $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[$.

حساب مشتقة دالة مرجعية تتضمن دالة أسية:

حل التمرين 5:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=xe^x \Leftrightarrow f'(x)=1\times e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

2) $f(x)=\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$. f معرفة على $\mathbb{R}$ لأنه $\forall x\in\mathbb{R}; 2e^x+1>0$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{e^x-x}{2e^x+1} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{(e^x-1)(2e^x+1)-(e^x-x)(2e^x)}{(2e^x+1)^2}$

$$=\frac{(2e^{2x}+e^x-2e^x-1)-(2e^{2x}-2xe^x)}{(2e^x+1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}+e^x-2e^x-1-2e^{2x}+2xe^x}{(2e^x+1)^2}=\frac{(2x-1)e^x-1}{(2e^x+1)^2}$$

$\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{(2x-1)e^x-1}{(2e^x+1)^2}$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(2x-1)e^x \Leftrightarrow f'(x)=2\times e^x+(2x-1)e^x=(2x+1)e^x$.

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(e^x-x)(2e^x-3) \Leftrightarrow f'(x)=(e^x-1)(2e^x-3)+(e^x-x)2e^x$

$$=2e^{2x}-3e^x-2e^x+3+2e^{2x}-2xe^x=4e^{2x}-(2x+5)e^x+3$$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=4e^{2x}-(2x+5)e^x+3$.

5) $f(x)=\sqrt{e^x-4}$.

❖ $e^x-4>0 \Leftrightarrow e^x>4 \Leftrightarrow x>\ln 4 \Leftrightarrow x>2\ln 2 \Leftrightarrow x\in]2\ln 2;+\infty[$.

❖ $\forall x\in\left]2\ln 2;+\infty\right[;\ f(x)=\sqrt{e^x-4}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$.

6) $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ f(x)=\dfrac{1}{x}e^{2x}\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{2x}+\dfrac{1}{x}2e^{2x}=\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{2x}=\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)e^{2x}$.

7) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x-5}}$. f معرفة على $\mathbb{R}$ لأنه $\forall x\in\mathbb{R};e^{2x-5}>0$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{1}{e^{2x-5}}\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{2e^{2x-5}}{\left(e^{2x-5}\right)^2}=-\dfrac{2}{e^{2x-5}}$.

8) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(e^{3x^2+2x}+x\right)^8\Leftrightarrow f'(x)=8\times\left((6x+2)e^{3x^2+2x}+1\right)\left(e^{3x^2+2x}+x\right)^7$

$=\left(16(3x+1)e^{3x^2+2x}+8\right)\left(e^{3x^2+2x}+x\right)^7$.

حل التمرين 6:

1) $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ f(x)=\left(\dfrac{5}{x}\right)e^x\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{5}{x^2}e^x+\dfrac{5}{x}e^x=5\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)e^x=5\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)e^x$.

2) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\};\ f(x)=\left(\dfrac{5x+2}{4x-2}\right)e^x$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\};u(x)=\dfrac{5x+2}{4x-2}\Leftrightarrow u'(x)=\dfrac{5(4x-2)-4(5x+2)}{(4x-2)^2}=\dfrac{-18}{(4x-2)^2}$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\};\ f'(x)=\left(\dfrac{-18}{(4x-2)^2}\right)e^x+\left(\dfrac{5x+2}{4x-2}\right)e^x=\left(\dfrac{(5x+2)(4x-2)-18}{(4x-2)^2}\right)e^x$

$=\left(\dfrac{20x^2-10x+8x-4-18}{(4x-2)^2}\right)e^x=\left(\dfrac{10x^2-x-11}{2(2x-1)^2}\right)e^x$.

3) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};\ f(x)=\left(-\dfrac{4x}{5x+5}\right)e^x$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};u(x)=\dfrac{-4x}{5x+5}\Leftrightarrow u'(x)=\dfrac{-4(5x+5)-5(-4x)}{(5x+5)^2}=\dfrac{-20}{(5x+5)^2}$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};\ f'(x)=\left(\dfrac{-20}{(5x+5)^2}\right)e^x+\left(-\dfrac{4x}{5x+5}\right)e^x=\left(\dfrac{(-4x)(5x+5)-20}{(5x+5)^2}\right)e^x$

$=\left(\dfrac{-20\left(x^2+x+1\right)}{(5x+5)^2}\right)e^x=\left(\dfrac{-4\left(x^2+x+1\right)}{5(x+1)^2}\right)e^x$.

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(-5x^2+5x-5\right)e^x\Leftrightarrow f'(x)=(-10x+5)e^x+\left(-5x^2+5x-5\right)e^x$

$=\left(-5x^2-5x\right)e^x=(-5x)(x+1)e^x$.

5) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}; f(x)=\left(\frac{-x-4}{3x-4}\right)e^{x}.$

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}; u(x)=\frac{-x-4}{3x-4}\Leftrightarrow u'(x)=\frac{-(3x-4)-3(-x-4)}{(3x-4)^2}=\frac{16}{(3x-4)^2}$

❖ $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}; f'(x)=\left(\frac{16}{(3x-4)^2}\right)e^{x}+\left(\frac{-x-4}{3x-4}\right)e^{x}=\left(\frac{-3x^2-8x+32}{(3x-4)^2}\right)e^{x}.$

6) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}; f(x)=\left(\frac{x+3}{-5x-4}\right)e^{x}.$

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}; u(x)=\frac{x+3}{-5x-4}\Leftrightarrow u'(x)=\frac{(-5x-4)+5(x+3)}{(-5x-4)^2}=\frac{11}{(-5x-4)^2}$

❖ $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}; f'(x)=\left(\frac{11}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}+\left(\frac{x+3}{-5x-4}\right)e^{x}=\left(\frac{(-5x-4)(x+3)+11}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}$

$$=\left(\frac{-5x^2-15x-4x-12+11}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}=\left(\frac{-5x^2-19x-1}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}.$$

7) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=f(x)=(4x-2)e^{x}\Leftrightarrow f'(x)=4e^{x}+(4x-2)e^{x}$

$$=(4x-2+4)e^{x}=2(2x+1)e^{x}.$$

حل التمرين 7:

1) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}; f(x)=\frac{e^{-2x-4}}{3x-3}=\frac{e^{-2x-4}}{3(x-1)}.$

❖ $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}; f'(x)=\frac{3e^{-2x-4}+2(3x-3)e^{-2x-4}}{(3(x-1))^2}=\left(\frac{6x-3}{9(x-1)^2}\right)e^{-2x-4}$

$$=\left(\frac{2x-1}{3(x-1)^2}\right)e^{-2x-4}.$$

2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=(-2x-1)e^{-x-1}.$

❖ $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-2e^{-x-1}-(-2x-1)e^{-x-1}=(2x+1-2)e^{-x-1}=(2x-1)e^{-x-1}.$

3) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=\frac{4-3x}{e^{4-x}}=(4-3x)e^{x-4}.$

❖ $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-3e^{x-4}+(4-3x)e^{x-4}=(4-3x-3)e^{x-4}=(1-3x)e^{x-4}.$

4) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=(-x-3)e^{3-x}.$

❖ $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-e^{3-x}-(-x-3)e^{3-x}=(x+3-1)e^{3-x}=(x+2)e^{3-x}.$

حل التمرين 8:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(2x+1)e^{2x+1}$.

نضع $u(x)=2x+1$، ومنه فإن $f(x)=u(x)e^{u(x)}$.

- $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=2x+1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};u'(x)=2$
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=2e^{2x+1}+2(2x+1)e^{2x+1}=4(x+1)e^{2x+1}$.
  - $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.
  - $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-1;+\infty\right[$
  - $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-1\right[$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{e^{x}-\left(-e^{-x}\right)}{2}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}>0$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{3e^{x}}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{3e^{x}\left(e^{2x}+1\right)-3e^{x}\left(2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^{2}}$

$$=\frac{3e^{x}\left(e^{2x}+1-2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^{2}}=\frac{3e^{x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{3e^{x}\left(1-e^{x}\right)\left(1+e^{x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^{2}}$$

- نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $\dfrac{3e^{x}\left(1+e^{x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^{2}}>0$ ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $\left(1-e^{x}\right)$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}<1 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[$
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-e^{x}<0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x\in\left]0;+\infty\right[$.

حساب المشتقات المتتالية لدالة تتضمن الدالة الأسية:

حل التمرين 9:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(2x-2)e^{5x+3}$.

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=2e^{5x+3}+5(2x-2)e^{5x+3}=(10x-8)e^{5x+3}$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=10e^{5x+3}+5(10x-8)e^{5x+3}=(50x-30)e^{5x+3}$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(-5x)e^{x+5}$.

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-5)e^{x+5}+(-5x)e^{x+5}=-5(x+1)e^{x+5}$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=(-5)e^{x+5}+(-5x-5)e^{x+5}=-5(x+2)e^{x+5}$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(-5x^{2}-4x-4\right)e^{x+5}$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-10x-4)e^{x+5}+\left(-5x^2-4x-4\right)e^{x+5}=\left(-5x^2-14x-8\right)e^{x+5}$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=(-10x-14)e^{x+5}+\left(-5x^2-14x-8\right)e^{x+5}=\left(-5x^2-24x-22\right)e^{x+5}$.

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(5-x^2\right)e^{x+2}$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-2x)e^{x+2}+\left(5-x^2\right)e^{x+2}=\left(5-x^2-2x\right)e^{x+2}$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=(-2x-2)e^{x+2}+\left(5-x^2-2x\right)e^{x+2}=\left(3-x^2-4x\right)e^{x+2}$.

حل التمرين 10:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(3x+2)e^{4x}$

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=3e^{4x}+(3x+2)\left(4e^{4x}\right)=(12x+11)e^{4x}$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=12e^{4x}+4(12x+11)e^{4x}=8(6x+7)e^{4x}$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(x^3+2x-7\right)e^{x}$

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\left(3x^2+2\right)e^{x}+\left(x^3+2x-7\right)e^{x}=\left(x^3+3x^2+2x-5\right)e^{x}$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=\left(3x^2+6x+2\right)e^{x}+\left(x^3+3x^2+2x-5\right)e^{x}=\left(x^3+6x^2+8x-3\right)e^{x}$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(e^x-2\right)^4$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=4e^x\left(e^x-2\right)^3$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=4e^x\left(e^x-2\right)^3+4e^x\left[3e^x\left(e^x-2\right)^2\right]$

$$=4e^x\left(e^x-2\right)^2\left(4e^x-2\right)=8e^x\left(2e^x-1\right)\left(e^x-2\right)^2.$$

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(-3x-5)e^{5-3x}$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-3e^{5-3x}-3(-3x-5)e^{5-3x}=-3(-3x-5+1)e^{5-3x}=3(3x+4)e^{5-3x}$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=9e^{5-3x}-3(9x+12)e^{5-3x}=3(-9x-9)e^{5-3x}=-27(x+1)e^{5-3x}$.

تحديد نهاية دالة أسية:

حل التمرين 11:

من خلال الدرس نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} -5e^x=0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} -5e^x=-\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5+e^x=5$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+e^x=+\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-e^x=2$.

$6)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0.$

$7)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-3e^{-x}=-\infty\quad\left(\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\right).$

$8)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{7}=+\infty.$

$9)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{3}e^x=0.$

$10)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-2e^{-x}=0.$

حل التمرين 12:

$1)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x+3}=+\infty.$

$2)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^+\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$

$3)\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-3}=0.$

$4)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0.$

حل التمرين 13:

$1)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0.$

$2)\ \lim\limits_{x\to3}\left(2x^2-18\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to3}2e^{2x^2-18}=2.$

$3)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x}{2x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x^2-3x}{2x-1}}=+\infty.$

$4)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-5\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x^3-5}=+\infty.$

$5)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-3x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x^2-3x+5}=+\infty.$

$6)\ \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2x^2-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x(2x-1)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}(2x-1)=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2x^2-x}{x}}=e^{-1}.$

$7)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-3x}{x+5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{2x^2-3x}{x+5}}=0.$

$8)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2+x+1}=+\infty.$

حل التمرين 14:

$1)\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3-x}=+\infty.$

$2)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2-5x+4\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x^2-5x+4}=+\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3x-7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3x}\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3x-7}}=1.$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x^5-2x+3}{3x-7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x^5}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x^4}{3}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-4x^5-2x+3}{3x-7}}=0.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x-5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-3x-5}=+\infty.$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x-5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-3x-5}=+\infty.$

تحديد نهاية دالة تتضمن عبارة أسية:

حل التمرين 15:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-3)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x-3}\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4}{e^{-x-3}}\right)=-\infty.$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-6x^2-4x+2\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-6x^2-4x+2}\right)=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{e^{-6x^2-4x+2}}=-\infty.$

3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+8)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-5x-8)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-5x-8}\right)=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+8)e^{-5x-8}=+\infty.$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(6x+6)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(7x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{7x}\right)=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(6x+6)e^{7x}=+\infty.$

5) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-x-1\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2-x-1}\right)=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1+e^{2x^2-x-1}=+\infty.$

6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x-5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-15x^2+5x+4\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2-x-1}\right)=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x-5}{e^{-15x^2+5x+4}}=-\infty.$

7) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-3)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+3x-5\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2-x-1}\right)=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 5x-3+e^{-2x^2+3x-5}=+\infty.$

8) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-7)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+21x-4\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x^2+21x-4}\right)=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-x-7)e^{x^2+21x-4}=-\infty.$

9) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x-6)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+9x+3\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2+9x+3}\right)=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-5x-6)e^{2x^2+9x+3}=-\infty.$

حل التمرين 16:

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x+5\right)=5\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3e^x-7\right)=-7\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x+5}{3e^x-7}=-\dfrac{5}{7}.$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-7x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-7x=+\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2\right)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}-2}{-7}=-\infty.$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x+7\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x\right)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-2x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x+7\right)e^{-2x}=+\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+1\right)=-\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3e^{-x^2+1}\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}2+3e^{-x^2+1}=2.$

6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-3\right)=-3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+2\right)=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-3}{e^x+2}=-\dfrac{3}{2}.$

7) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\left(e^x\right)=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(e^x+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}\right)=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+1}{e^{2x}}=2.$

حل التمرين 17:

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+4\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+4\right)e^x=-\infty.$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}e^x+x^2=+\infty.$

3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}e^x-3x^5=+\infty.$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\left(e^x\right)=1\\ \lim\limits_{x\to0}\left(1-2e^x\right)=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}e^x\left(1-2e^x\right)=-1.$

5) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\right)=-\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0.$

6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-3\right)=-3\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^x-3}=-\dfrac{1}{3}.$

7) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+1\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2x^2+1=+\infty.$

8) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x^3+1\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-3e^x\right)=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x^3+1\right)\left(1-3e^x\right)=+\infty.$

تشكيل جدول تغيرات دالة أسية:

حل التمرين 18:

1) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=e^x+x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=e^x+1>0.$

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\right)=-\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty.$

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty.$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=xe^x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x.$

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^x>0$. ومنه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+x)$.

❖ $f'(x)=0\Leftrightarrow 1+x=0\Leftrightarrow x=-1.$

❖ $f'(x)>0\Leftrightarrow 1+x>0\Leftrightarrow x>-1\Leftrightarrow x\in\left]-1;+\infty\right[.$

❖ من الدرس لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=0$.

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^x\right)=+\infty.$

❖ $f(-1)=(-1)e^{-1}=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}.$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) = \dfrac{e^x}{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) = \dfrac{2xe^x - 2e^x}{(2x)^2} = \dfrac{2(x-1)e^x}{4x^2} = \dfrac{(x-1)e^x}{2x^2}$.

❖ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $e^x > 0$ و $2x^2 > 0$. ومنه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$.

❖ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

❖ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$.

❖ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (2x) = -\infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{e^x}{2x}\right) = 0$ $\quad\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{2x}\right) = +\infty$.

❖ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} (e^x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} (2x) = 0^+ \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{e^x}{2x}\right) = +\infty$ $\quad\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} (e^x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^-} (2x) = 0^- \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} \left(\dfrac{e^x}{2x}\right) = -\infty$.

❖ $f(1) = \dfrac{e^1}{2\times1} = \dfrac{e}{2}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e}{2}$	↗	$+\infty$

4) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = e^x - 3x + 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = e^x - 3$.

❖ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = ln3$.

❖ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > ln3 \Leftrightarrow x \in]ln3;+\infty[$.

❖ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x+1) = +\infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 3x + 1 = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 3x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \dfrac{3x}{e^x} + e^{-x}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x}\right) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-3x+1=+\infty$.

❖ $f(ln3)=e^{ln3}-3ln3+1=3-3ln3+1=4-3ln3$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$ln3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$4-3ln3$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{x^2+3x+1} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(2x+3)e^{x^2+3x+1}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{x^2+3x+1}>0$. ومنه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2x+3)$.

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x+3>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+3x+1}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+3x+1}=+\infty$.

❖ $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=e^{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(-\frac{3}{2}\right)+1}=e^{\frac{9-18+4}{4}}=e^{\frac{-5}{4}}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{\frac{-5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

حل التمرين 19:

1) $\forall x\in I;\ f(x)=-2(2x+1)e^{-x}$

❖ $\forall x\in I;\ f'(x)=-4e^{-x}+(4x+2)e^{-x}=2(2x-1)e^{-x}$.

- من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $2e^{-x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(2x-1)$:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

❖ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\left(2\left(\dfrac{1}{2}\right)+1\right)e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{4}{\sqrt{e}}$.

❖ $f(-5)=-2(2\times(-5)+1)e^{5}=18e^{5}$.

❖ $f(2)=-2(2(2)+1)e^{-2}=-10e^{-2}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$18e^5$	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$-10e^{-2}$

2) $\forall x \in I; f(x) = (x-5)e^{3x} \Leftrightarrow \forall x \in I; f'(x) = e^{3x} + 3(x-5)e^{3x} = (3x-14)e^{3x}$.

• من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $e^{3x} > 0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(3x-14)$:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{14}{3}$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x - 14 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{14}{3} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{14}{3}; +\infty\right[$.

❖ $f\left(\frac{14}{3}\right) = \left(\frac{14}{3} - 5\right)e^{3\left(\frac{14}{3}\right)} = \left(\frac{-1}{3}\right)e^{14}$.

❖ $f(1) = (1-5)e^{3(1)} = -4e^3$.

❖ $f(5) = (5-5)e^{3(5)} = 0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1		$\frac{14}{3}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-4e^3$	$\searrow$	$\left(\frac{-1}{3}\right)e^{14}$	$\nearrow$	0

3) $\forall x \in I; f(x) = 5x + 5 - 2e^{-2x} \Leftrightarrow \forall x \in I; f'(x) = 5 + 4e^{-2x} > 0$.

❖ $f(1) = 5\times1 + 5 - 2e^{-2\times1} = 10 - 2e^{-2}$.

❖ $f(5) = 5\times5 + 5 - 2e^{-2\times5} = 30 - 2e^{-10}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1		5
$f'(x)$		$+$	
f	$10-2e^{-2}$	$\nearrow$	$30-2e^{-10}$

4) $\forall x \in I; f(x) = 1 - 2e^{3x} \Leftrightarrow \forall x \in I; f'(x) = -6e^{3x} < 0$.

❖ $f(1) = 1 - 2e^3$.

❖ $f(5) = 1 - 2e^{15}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1	5
$f'(x)$	$-$	
f	$1-2e^3$ ↘	$1-2e^{15}$

5) $\forall x\in I; f(x)=4xe^{4x} \Leftrightarrow \forall x\in I; f'(x)=4e^{4x}+16xe^{4x}=4(4x+1)e^{4x}$.

• من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $4e^{4x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(4x+1)$:

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$.

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow 4x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.

❖ $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=4\left(-\dfrac{1}{4}\right)e^{4\left(-\frac{1}{4}\right)}=-e^{-1}$.

❖ $f(-5)=4(-5)e^{4(-5)}=-20e^{-20}$.

❖ $f(2)=4(2)e^{4(2)}=8e^{8}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5	$-\frac{1}{4}$	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$-20e^{-20}$ ↘	$-e^{-1}$	↗ $8e^{8}$

6) $\forall x\in I; f(x)=-(2x+3)e^{-3x} \Leftrightarrow \forall x\in I; f'(x)=-2e^{-3x}+3(2x+3)e^{-3x}$

$=(6x+7)e^{-3x}$.

• من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-3x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(6x+7)$:

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x+7=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{6}$.

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow 6x+7>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{7}{6} \Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{7}{6};+\infty\right[$.

❖ $f\left(-\dfrac{7}{6}\right)=-\left(2\left(-\dfrac{7}{6}\right)+3\right)e^{-3\left(-\frac{7}{6}\right)}=-\dfrac{2}{3}e^{\frac{7}{2}}$.

❖ $f(-10)=-(2(-10)+3)e^{-3(-10)}=17e^{30}$.

❖ $f(5)=-(2(5)+3)e^{-3(5)}=-13e^{-15}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-10		$-\frac{7}{6}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$17e^{30}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}e^{\frac{7}{2}}$	$\nearrow$	$-13e^{-15}$

حل التمرين 20:

$$1)\ \forall x\in\mathbb{R}; f(x)=\left(x^2-\frac{22}{3}x+\frac{113}{9}\right)e^{-3x-3}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=\left(2x-\frac{22}{3}\right)e^{-3x-3}-3\left(x^2-\frac{22}{3}x+\frac{113}{9}\right)e^{-3x-3}$$

$$=\left(-3x^2+24x+45\right)e^{-3x-3}$$

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^{-3x-3}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $\left(-3x^2+24x+45\right)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+24x+45=0$.

- $\Delta=1116>0 \Rightarrow x_1=3\ ;\ x_2=5$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$2)\ \forall x\in\mathbb{R}; f(x)=\left(x^2-15\right)e^{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=(2x)e^{4-x}-\left(x^2-15\right)e^{4-x}=\left(-x^2+2x+15\right)e^{4-x}.$$

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^{4-x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $\left(-x^2+2x-15\right)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+15=0$.

- $\Delta=64>0 \Rightarrow x_1=-3\ ;\ x_2=5$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$3)\ \forall x\in\mathbb{R}; f(x)=-(3x-1)e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-3e^{-3x}+3(3x-1)e^{-3x}=3(3x-2)e^{-3x}.$$

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $3e^{-3x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(3x-2)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(x^2-5x+5\right)e^{3-x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(2x-5)e^{3-x}-\left(x^2-5x+5\right)e^{3-x}=\left(-x^2+7x-10\right)e^{3-x}.$

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^{3-x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $\left(-x^2+7x-10\right)$:

❖ $f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+7x-10=0.$

- $\Delta=9>0\Rightarrow x_1=2\ ;\ x_2=5.$

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إيجاد معادلة المماس عند نقطة معينة:

حل التمرين 21:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(2-x)e^{2x}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-e^{2x}+2(2-x)e^{2x}=(3-2x)e^{2x}.$

❖ $\left(f'(0)=3\ ;\ f(0)=2\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x+2.$

❖ معادلة المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=3x+2$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=3-x+6e^{-2x}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-12e^{-2x}-1.$

❖ $\left(f'(0)=-13\ ;\ f(0)=9\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=-13x+9.$

❖ معادلة المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=-13x+9$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(3-5x)e^{-x}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-5e^{-x}-(3-5x)e^{-x}=(5x-8)e^{-x}.$

❖ $\left(f'(0)=-8\ ;\ f(0)=3\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=-8x+3.$

❖ معادلة المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=-8x+3$.

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=3x+2+7e^{-x}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=3-7e^{-x}.$

❖ $\left(f'(0)=-4\ ;\ f(0)=9\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=-4x+9.$

❖ معادلة المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=-4x+9$.

5) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=-4(x-1)e^{4x}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-4e^{4x}-16(x-1)e^{4x}$

$=-4(4x-3)e^{4x}.$

❖ $\left(f'(0)=12\ ;\ f(0)=4\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=12x+4$

❖ معادلة المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=12x+4$.

حل التمرين 22:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=5-4x+5e^{4x}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=20e^{4x}-4=4\left(5e^{4x}-1\right).$

❖ $f'(1)=20e^4-4\ ;\ f(1)=1+5e^4$

❖ $y=f'(1)(x-1)+f(1)=\left(20e^4-4\right)x-\left(20e^4-4\right)+1+5e^4=\left(20e^4-4\right)x+5-15e^4.$

❖ معادلة المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 1 هي: $y=\left(20e^4-4\right)x+5-15e^4$.

2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=-2(x-2)+4e^{-x} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-2-4e^{-x}=-2\left(1+2e^{-x}\right)$.

❖ $f'(-1)=-2-4e$; $f(-1)=6+4e$

❖ $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=(-2-4e)x+(-2-4e)+(6+4e)$
$=(-2-4e)x+4$.

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها (-1) هي: $y=(-2-4e)x+4$.

دراسة دالة أسية:

حل التمرين 23:

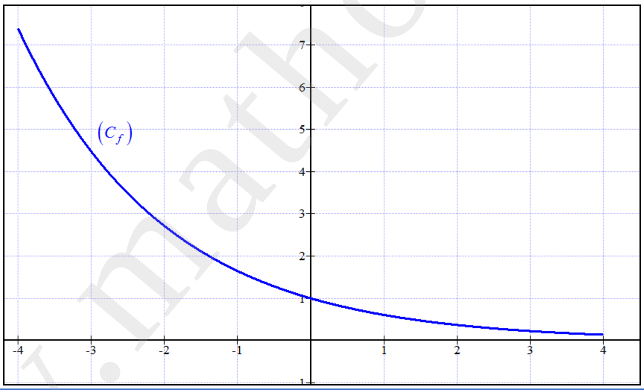
1) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=e^{\frac{-x}{2}} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}<0$.

2) $f(-4)=e^{2}$; $f(4)=e^{-2}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-4	4
$f'(x)$	$-$	
f	e^{2} ↘	e^{-2}

3) الرسم الموالي يمثل (C_f) على المجال $[-4;4]$.



حل التمرين 24:

1) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=e^{-2x^2} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-4xe^{-2x^2}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^{-2x^2}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(-4x)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x=0 \Leftrightarrow x=0$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow -4x>0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[$.

❖ $f(0)=e^{0}=1$; $f(-5)=e^{-50}$; $f(5)=e^{-50}$.

2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5	0	5
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	e^{-50} ↗	1	↘ e^{-50}

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(-x)=e^{-2(-x)^2}=e^{-2x^2}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};\ f(-x)=f(x)$.

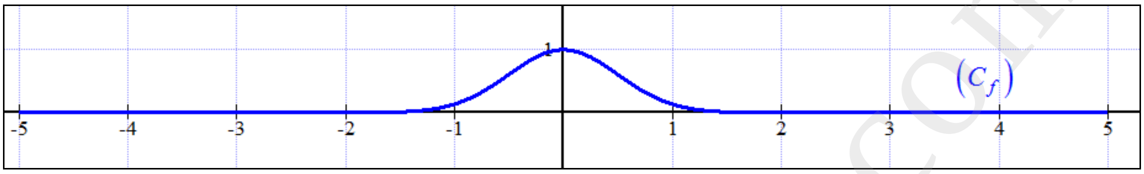
❖ $M(x,y)\in(C_f)\Leftrightarrow y=f(x)=f(-x)\Leftrightarrow M'(-x,y)\in(C_f)$.

❖ النقطتان $M(x,y)$ و $M'(-x,y)$ لهما نفس الترتيب وفاصلتان متعاكستان، إذن فهما متناظرتان بالنسبة لمحور التراتيب. نستنتج أن: (C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر.

4)

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	10
$f(x)$	1	0,607	0,135	0,011	3×10^{-4}	$1,5\times10^{-8}$	1×10^{-14}	2×10^{-22}	1×10^{-87}

5) الرسم الموالي يمثل (C_f) على المجال $[-5;5]$.



حل التمرين 25:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{-3x}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-3e^{-3x}<0$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x}=0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	↘	0

❖ $\forall x\in\mathbb{R};g(x)=e^{-2x^2}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};g'(x)=-4xe^{-2x^2}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-2x^2}>0$. ومنه فإن $g'(x)$ من إشارة $(-4x)$:

❖ $g'(x)=0\Leftrightarrow-4x=0\Leftrightarrow x=0$.

❖ $g'(x)>0\Leftrightarrow-4x>0\Leftrightarrow x<0\Leftrightarrow x\in]-\infty;0[$.

❖ $g(0)=e^0=1$.

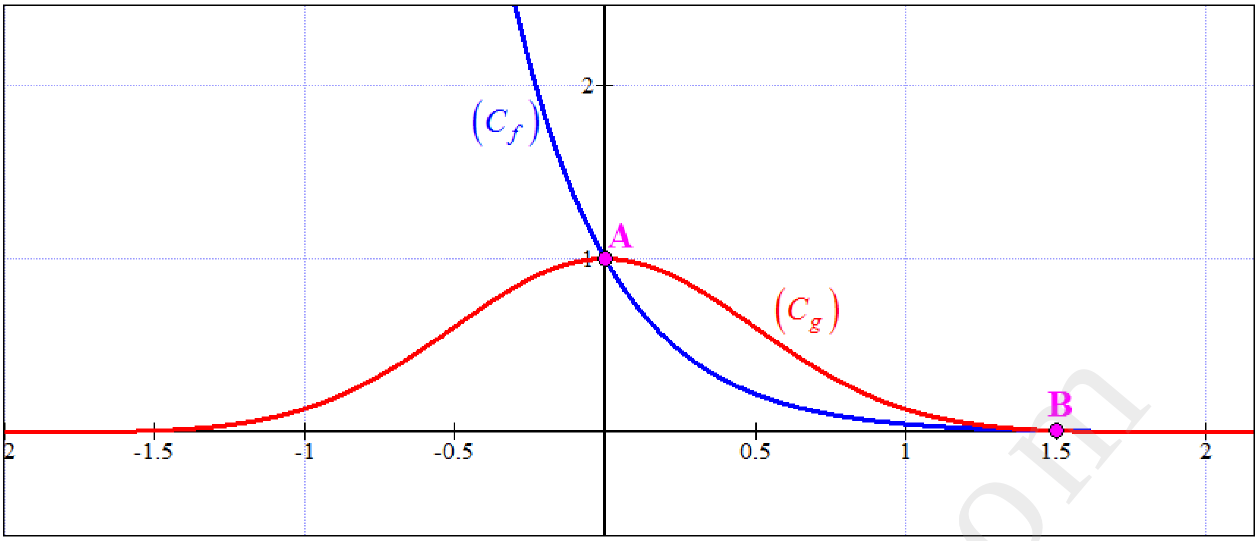
❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x^2}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x^2}=0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة g يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	1	$-$	
g	0	↗	1	↘	0

2) الرسم الموالي يمثل (C_f) و (C_g).



3) لإيجاد نقاط تقاطع (C_f) و (C_g) حسابيا، نحل المعادلة $f(x)=g(x)$.

❖ $f(x)=g(x) \Leftrightarrow e^{-3x}=e^{-2x^2} \Leftrightarrow -3x=-2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-3x=0$

$$\Leftrightarrow x(2x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \ / \ 2x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \ / \ x=\frac{3}{2}.$$

❖ $x=0 \Leftrightarrow y=e^0=1.$

❖ $x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=e^{-3\left(\frac{3}{2}\right)}=e^{\frac{-9}{2}} \simeq 0{,}01.$

دراسة دالة تتضمن عبارة أسية:

حل التمرين 26:

1) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+e^x-\cancel{e^{2x}}+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

❖ $f(-5)=\dfrac{e^{-5}-1}{e^{-5}+1} \simeq -0{,}99$.

❖ $f(5)=\dfrac{e^5-1}{e^5+1} \simeq 0{,}99$.

2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5 5
$f'(x)$	$+$
f	$-0{,}99 \nearrow 0{,}99$

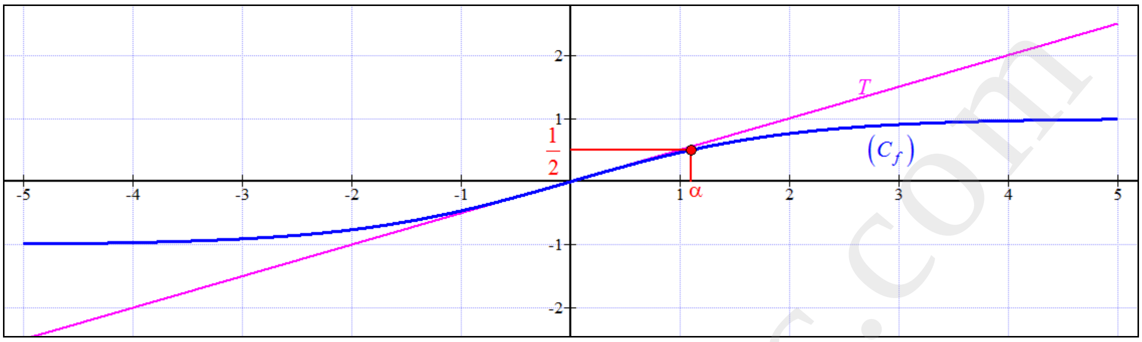
3) $f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=0$

ومنه فإن (C_f) يشمل النقطة O.

4) $\left(f'(0)=\dfrac{2e^0}{(e^0+1)^2}=\dfrac{1}{2} \ ;\ f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=0 \right) \Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{1}{2}x$.

❖ معامل توجيه المماس T لـ (C_f) عند النقطة O هو: $\dfrac{1}{2}$.

5) الرسم الموالي يمثل (C_f) والمماس T على المجال $[-5;5]$.



حل التمرين 27:

1) $\forall x\in[-3;3];\ f(x)=e^{2x}-2x \Leftrightarrow \forall x\in[-3;3];\ f'(x)=2e^{2x}-2=2(e^{2x}-1)$.

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1>0 \Leftrightarrow 2x=ln1=0 \Leftrightarrow x=0$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x\in]0;3[$.

❖ $f(0)=e^{2\times 0}-2\times 0=1$.

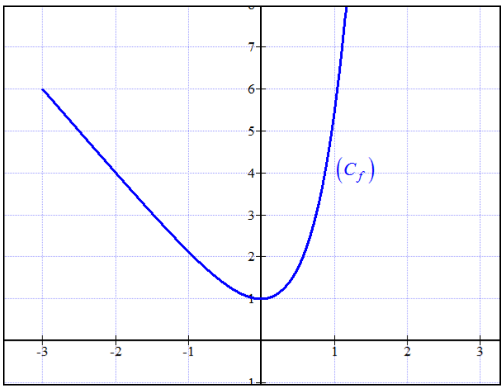
❖ $f(-3)=e^{2(-3)}-2(-3)=e^{-6}+6$.

❖ $f(3)=e^{2(3)}-2(3)=e^{6}-6$.

2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-3		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$e^{-6}+6$	↘	1	↗	$e^{6}-6$

3) الرسم الموالي يمثل (C_f).



حل التمرين 28:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

$$=\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1-e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}>0.$$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$

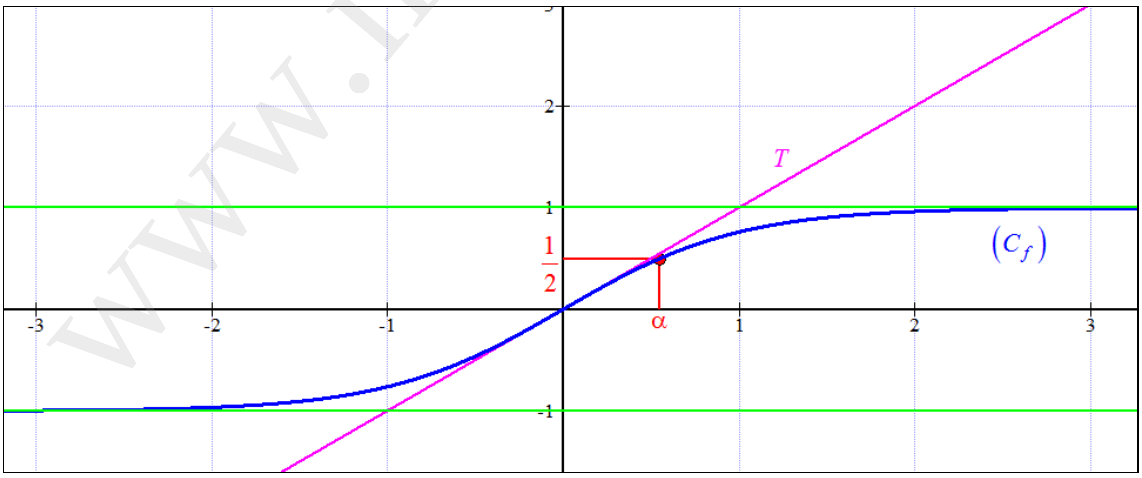
2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-1 \nearrow 1$

3) $\left(f'(0)=\dfrac{4e^0}{\left(e^0+1\right)^2}=1\ ;\ f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=0\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=x.$

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=x$.

4) الرسم الموالي يمثل (C_f) والمماس T.



5) من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن:

❖ الدالة f تأخذ قيمها من المجال $[-1;1]$، وبما أن $\dfrac{1}{2}\in[-1;1]$ و f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فإن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

- $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(e^{2x}-1\right)=e^{2x}+1 \Leftrightarrow e^{2x}-3=0$

$$\Leftrightarrow e^{2x}=3>0 \Leftrightarrow x=\frac{ln3}{2}.$$

ومنه فإن: $\alpha=\frac{ln3}{2}\simeq 0,55$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه